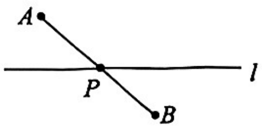
模型讲解

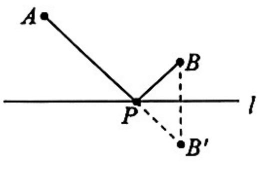
【模型1】如图，定点A，B分布在定直线l的两侧，在直线l上找一点P，使得$PA+PB$的值最小.

【作法】如图，连接AB，与直线l的交点即为所求点P.



【模型2】如图，定点A，B分布在定直线l的同侧，在直线l上找一点P，使得$PA+PB$的值最小.

【作法】如图，作点B关于直线l的对称点B'，连接AB'，与直线l的交点即为所求点P.



【模型3】如图，点P为角内一点，在射线l_1，l_2上分别找点M，N，使得$\triangle PMN$的周长最小.

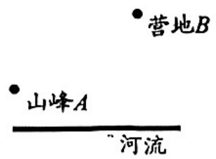
名师有话说

更多精彩内容请扫码观看

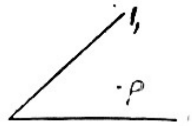
趣味小百科

唐朝诗人李颀的《古从军行》开头两句说："白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河."诗中隐含着一个有趣的数学问题.

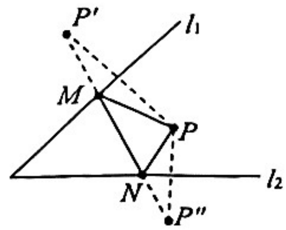
如图所示，诗中将军在观望烽火之后从山脚下的A点出发，走到河边饮马后再到B点宿营.请问怎样走才能使总的路程最短？



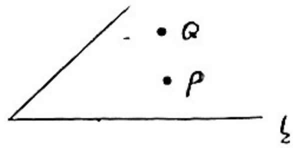
从此，这个被称为"将军饮马"的问题广泛流传.



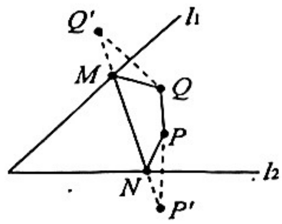
【作法】如图，分别作点 P 关于两直线 l_1，l_2 的对称点 P' 和 P''，连接 $P'P''$，与两射线的交点即为所求点 M，N.



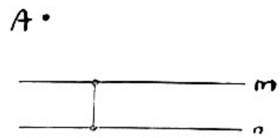
【模型4】如图，P，Q为角内的两个定点，在射线l_1，l_2上分别找点M，N，使得四边形$PQMN$的周长最小.



【作法】如图，分别作点 Q，P 关于直线 l_1，l_2 的对称点 Q' 和 P'，连接 $Q'P'$，与两射线的交点即为所求点 M；N.

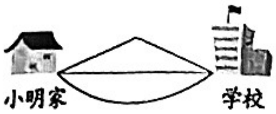


【模型5】如图，直线$m \parallel n$，A，B分别为m上方和n下方的定点(直线AB不与m垂直)，在m，n上分别求点M，N，使得$MN \perp m$，且$AM+MN+BN$的值最小.



【作法】如图，将点 A 向下平移，使 $AA'=MN$，连接 $A'B$，交 n 于点 N，过点 N 作 $MN \perp m$ 于点 M，则点 M 和点 N 即为所求.

趣味小百科



直着走，小明能最快到达学校.

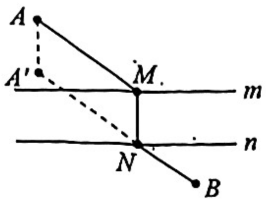
名师点拨

求将军饮马问题的关键：

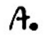
1 分清动点与定点；

2 动点所在直线就是对称轴；

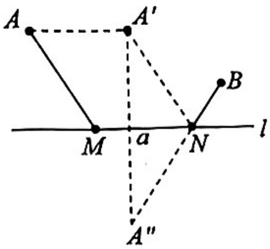
3 作定点的对称点.



【模型6】如图，定点A，B分布在直线l的同侧，长度为a(a为定值)的线段MN在l上移动(点M在点N的左边)，在直线l上求两点M，N(点M在左)，使得$MN=a$，并使得$AM+MN+NB$的值最小.



【作法】如图，将点A向右平移a个单位长度得到点A'，作点A'关于l的对称点A''，连接$A''B$，交直线l于点N，将点N向左平移a个单位长度得到点M，则点M和点N即为所求.



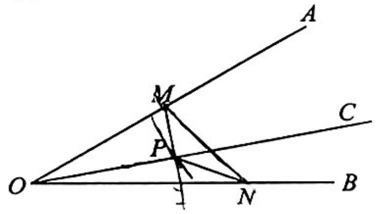
模型巧记

求最值，需对称，先把对称轴来找，动点运动的直线就是对称轴，定点关于它对称.

典例秒杀

典例1 ★★★☆☆

如图，$\angle AOB=30°$，OC为$\angle AOB$内部的一条射线，P为射线OC上一点，$OP=4$，点M，N分别为OA，OB边上的动点，则$\triangle PMN$周长的最小值为(　　).



A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】如图，作点P关于OA的对称点P_1，作点P关于OB的对称点P_2，连接P_1P_2，与OA的交点为点M，与OB的交点为

通常看到角为30°的此类题，线段所给的数值是多少，答案就是多少，这是因为所求三角形通常是那条线段所在的等边三角形.

名师点拨

常见图形的对称轴：

1 线段有两条对称轴，分别是这条线段的垂直平分线和线段所在的直线.

2 角有一条对称轴，是角平分线所在的直线.

3 等腰三角形有一条对称轴，是顶角平分线所在的直线.

4 等边三角形有三条对称轴，分别是三个顶角平分线所在的直线.

5 矩形有两条对称轴，分别是相邻两边的垂直平分线.

6 正方形有四条对称轴，分别是相邻两边的垂直平分线和对角线所在的直线.

7 菱形有两条对称轴，分别是对角线所在的直线.

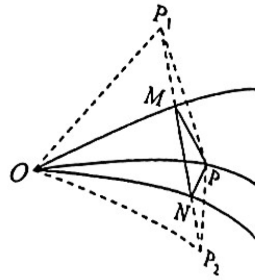
8 等腰梯形有一条对称轴，是两底的垂直平分线.

9 正多边形有与边数相同条的对称轴.

10 圆有无数条对称轴，是任何一条直径所在的直线.

点 N，则 $PM=P_1M$，$PN=P_2N$.

此时，$\triangle PMN$ 的周长最小，为 $PM+MN+PN=P_1M+MN+P_2N=P_1P_2$.



连接 OP_1，OP_2，

则 $OP_1=OP_2=OP=4$.

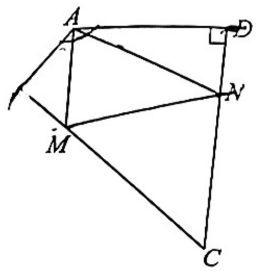
又 ∵ $\angle P_1OP_2=2\angle AOB=60°$，∴ $\triangle OP_1P_2$ 是等边三角形，

∴ $P_1P_2=OP_1=4$，∴ $\triangle PMN$ 周长的最小值是 4.

故选 B.

典例2 ★★☆☆☆

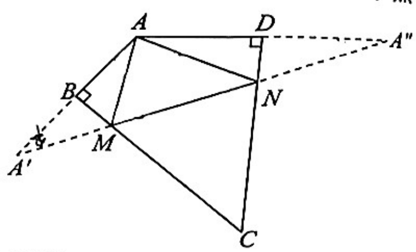
四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=130°$，$\angle B=\angle D=90°$，在 BC，CD 上分别找一点 M，N，使 $\triangle AMN$ 的周长最小，则 $\angle AMN+\angle ANM$ 的度数为(　　).



A. 80°　　B. 90°　　C. 100°　　D. 130°

【答案】C

【解析】如图，延长线段 AB 到点 A' 使得 $BA'=AB$，延长线段 AD 到点 A'' 使得 $DA''=AD$，连接 $A'A''$，与 BC，CD 分别交于点 M，N，



此时 $\triangle AMN$ 的周长最小.

∵ $\angle ABC=\angle ADC=90°$，

∴ 点 A，A' 关于直线 BC 对称，点 A，A'' 关于直线 CD 对称.

∵ $BA=BA'$，$MB\perp AB$，∴ $MA=MA'$.

同理，$NA=NA''$，∴ $\angle A'=\angle MAB$，$\angle A''=\angle NAD$.

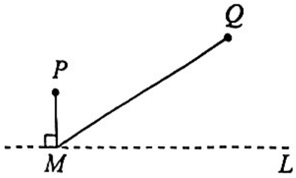
∵ $\angle AMN=\angle A'+\angle MAB=2\angle A'$，$\angle ANM=\angle A''+\angle NAD=2\angle A''$，∴ $\angle AMN+\angle ANM=2(\angle A'+\angle A'')$.

又 ∵ $\angle BAD=130°$，∴ $\angle A'+\angle A''=180°-\angle BAD=50°$，

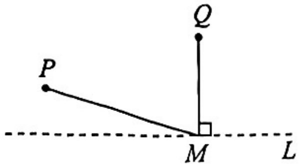
∴ $\angle AMN+\angle ANM=100°$. 故选 C.

小试牛刀

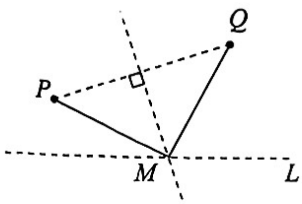
(★★☆☆☆)如图，直线 L 是一条河，P，Q 是两个村庄．欲在 L 上的某处修建一个水泵站，向 P，Q 两地供水，现有如下四种铺设方案，图中实线表示铺设的管道，则所需管道最短的是(　　)．



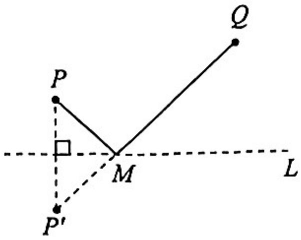
A



B

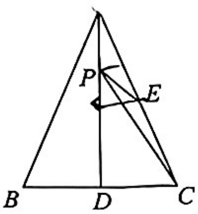


C



D

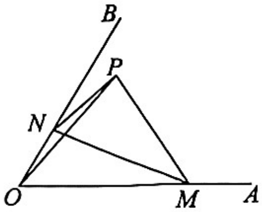
2.(★★☆☆☆)如图，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，D，E 分别是 BC，AC 的中点，点 P 是线段 AD 上的一个动点．当△PCE 的周长最小时，点 P 的位置是(



A. AD 与 BE 的交点处　　B. AD 的中点处

C. A 点处　　D. D 点处

3.(★★☆☆☆)如图，$\angle AOB=60°$，点 P 是$\angle AOB$ 内的定点，且 $OP=\sqrt{3}$，点 M，N 分别是射线 OA，OB 上异于点 O 的动点，则△PMN 周长的最小值是(　　)．



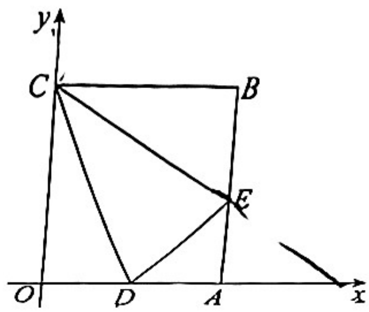
A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　C. 6　　D. 3

我的笔记

我的笔记

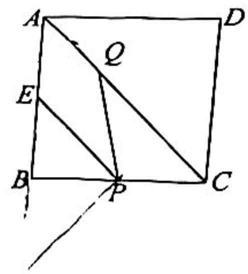
直击中考

1.（2016 江苏苏州中考真题）矩形 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，点 B 的坐标为 $(3,4)$，D 是 OA 的中点，点 E 在 AB 上，当 $\triangle CDE$ 的周长最小时，点 E 的坐标为（　　）



A. $(3,1)$　　B. $\left(3,\dfrac{4}{3}\right)$　　C. $\left(3,\dfrac{5}{3}\right)$　　D. $(3,2)$

2.（2020 贵州毕节中考模拟）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 是 AB 的中点，点 P 是边 BC 上的动点，点 Q 是对角线 AC 上的动点（包括端点 A，C），则 $EP+PQ$ 的最小值是________.



将军饮马，模型多样，对这类题的考查，小到选择、填空，大到解答压轴，常与函数结合。解决此类题的关键在于对称，希望同学们学完以后，对此类题有一个很好的理解。