

浅谈信息学竞赛中的“0”和“1”

——二进制思想在信息学竞赛中的应用

河北省石家庄二中

武森

前言

在德国图灵根著名的郭塔王宫图书馆（Schlossbibliothek zu Gotha）保存着一份弥足珍贵的手稿，其标题为：“1 与 0，一切数字的神奇渊源。这是造物的秘密美妙的典范，因为，一切无非都来自上帝。”

众所周知，二进制是计算技术中广泛采用的一种数制，现代的电子计算机技术全部采用的是二进制，因为它只使用 0、1 两个数字符号，非常简单方便，易于用电子方式实现。计算机内部处理的信息，都是采用二进制数来表示的。二进制（Binary）数用 0 和 1 两个数字及其组合来表示任何数。进位规则是“逢 2 进 1”，数字 1 在不同的位上代表不同的值，按从右至左的次序，这个值以二倍递增。除了数值外，英文字母、符号、汉字、声音、图象等数据在计算机内部也采用二进制数的形式来编码。目前最常用的是使用国际标准代码 ASCII 码（美国标准信息交换码）。二进制思想在信息学竞赛中也有广泛的应用。本文通过几个例子，总结了二进制思想在信息学竞赛中的应用。

关键字 二进制 十进制 树状数组 状态压缩 01 二叉树

正文

第一章：二进制思想在数据结构中的应用

例题一：Matrix

提供一个 $M \times N$ 的矩阵，其中每一个格子中的数不是 1 就是 0，初始时每一个格子的值为 0，我们可以修改这个矩阵中的数字，每次给出矩阵的左上角坐标 (x_1, y_1) ，以及右下角的坐标 (x_2, y_2) ，并且将矩阵中的数字全部取反（原来是 1 现在变成 0，原来是 0 现在变成 1），还可以每次查询第 x 行第 y 列的格子中的数字是什么。

分析：

根据这个题目中介绍的这个矩阵中的数的特点不是 1 就是 0，这样我们只需记录每个格子改变过几次，即可判断这个格子的数字。

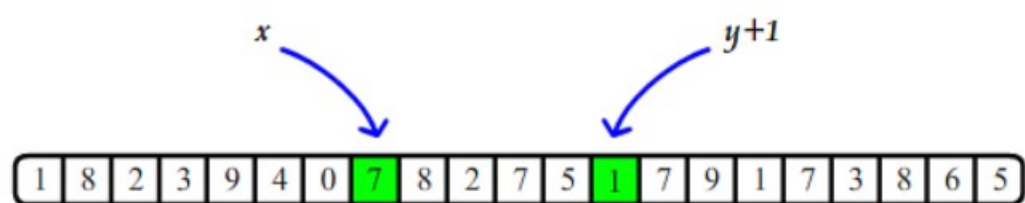
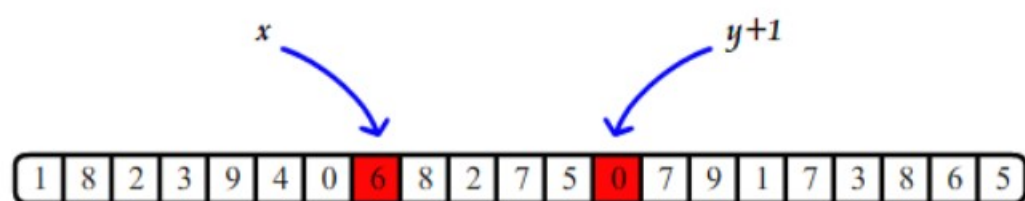
● 第一步

我们不妨把这道题目简化一下，假定题目中给定的是长度为 N 的一列格子 d 。

1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

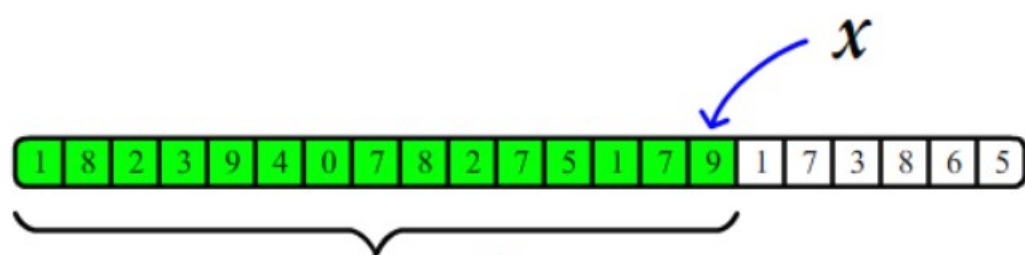
这样，这道题目就变得简单了。

每次修改的时候，给定一个格子修改的范围 (x, y) ，这样我们不妨把这个范围变成两个点，一个为更改的初始节点 x ，另一个为更改的终止节点 $y+1$ ，然后往这列格子中的这两个节点中加 1。



Insert $x, y+1$

每次询问 x 的时候只需计算出 $Sum_x = \sum_{i=1}^x d_i$ 这样就可以求出第 x 个格子被修改过几次，输出的答案就是 $Sum_x \bmod 2$ 。



Ans = $Sum_x \bmod 2$

Search x

通过以上的方 法，我们用一般的数据结构就可使得插入的复杂度

为 $O(\log N)$ ，查询的复杂度为 $O(\log N)$ 。

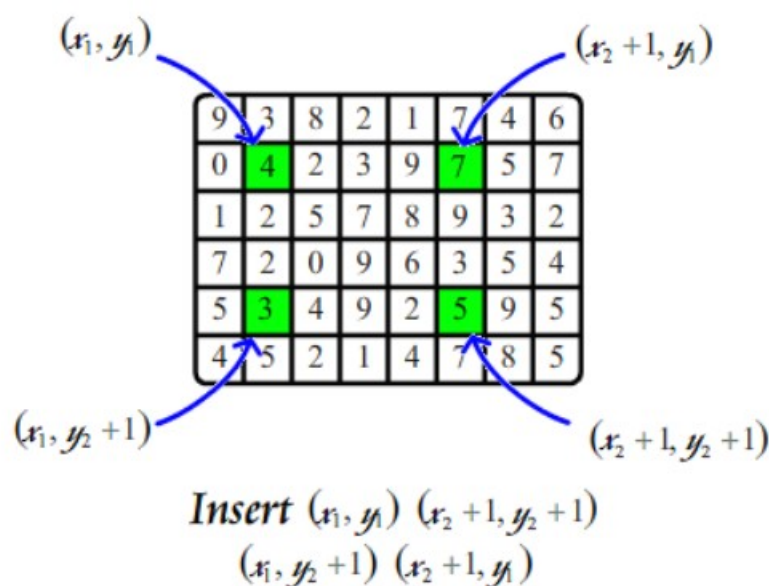
这样一维的问题我们就完美的解决了！

● 第二步

我们已经解决了一维的问题，接下来我们就可以看看题目中的二维情况。

我们能不能用上面的方法解决这一道题目呢？

通过分析我们只改变两个格子的数字保证不了要求的性质(只改变矩阵中的数字而不改变其他的数字)，由于一维的时候，我们加的两个点实际上给改变的区间定了一个范围，那么二维的情况，我们也给它设定一个范围，加上四个格子 $(x_1, y_1), (x_2 + 1, y_1), (x_1, y_2 + 1), (x_2 + 1, y_2 + 1)$ 每次插入的时候往这四个格子中加 1。



查询 (x, y) 的时候输出 $Sum_{x,y} = \sum_{i=0, j=0}^{i=x, j=y} d_{i,j}$ 即可。