韦达定理

定理关系

设一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a,b,c\in R,a\neq 0)$中，两根$x_1$、$x_2$有如下关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

[4]

数学推导

由一元二次方程求根公式知：$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

则有：

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}$$ [4]

练习题一

韦达定理

解答题 已知x_1、x_2是关于x的方程$x^2+(3a-1)x+2a^2-1=0$的两个实数根，使得$(3x_1-x_2)(x_1-3x_2)=-80$，求实数a的所有可能值.

解题过程：直接求解一元二次方程？不行的，因为方程里面除了x外，还有一个a,没法直接解的。

从方程的两个根x_1,x_2看的出来，可以使用韦达定理。

```
\large \left{\begin{matrix}
x_1+x_2=-\frac{b}{a}&=1-3a \
x_1  x_2=\frac{c}{a}&=2a^2-1
\end{matrix}\right.
```

目标式:$(3x_1-x_2)(x_1-3x_2)=3x_1^2-10x_1x_2+3x_2^2=3(x_1^2+x_2^2)-10x_1x_2$

为了能转化为x_1+x_2的形式，需要进行一下配方:

$=3(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2)-10x_1x_2 \quad =3(x_1+x_2)^2-16x_1x_2 \quad =3(1-3a)^2-16(2a^2-1)$
$=3(1-6a+9a^2)-32a^2+16 \quad =3-18a+27a^2-32a^2+16 \quad -5a^2-18a+19=-80$
$5a^2+18a-19=80 \quad 5a^2+18a-99=0$ 转化为一元二次方程形式，根据求根公式，计算 $a=\frac{-18 \pm \sqrt{18^2+4599}}{2\times 5}$

$a=\frac{-18\pm48}{10}$

$\therefore a_1=-6.6, a_2=3$

易错点

因为使用了求根公式，能够得到实数根的前提是方程有实数根，即要求$\triangle=b^2-4ac>=0$ 验证一下两个根:
计算$\triangle=b^2-4ac=(3a-1)^2-4\times(2a^2-1)$

- $a_1=3$代入，$\triangle=8^2-4\times17=-4<0$,此解需要舍去
- $a_2=-6.6$代入,$20.8^2-4\times (-26.66.6-1)>0$

所以，最终的答案只有$a=-6.6$