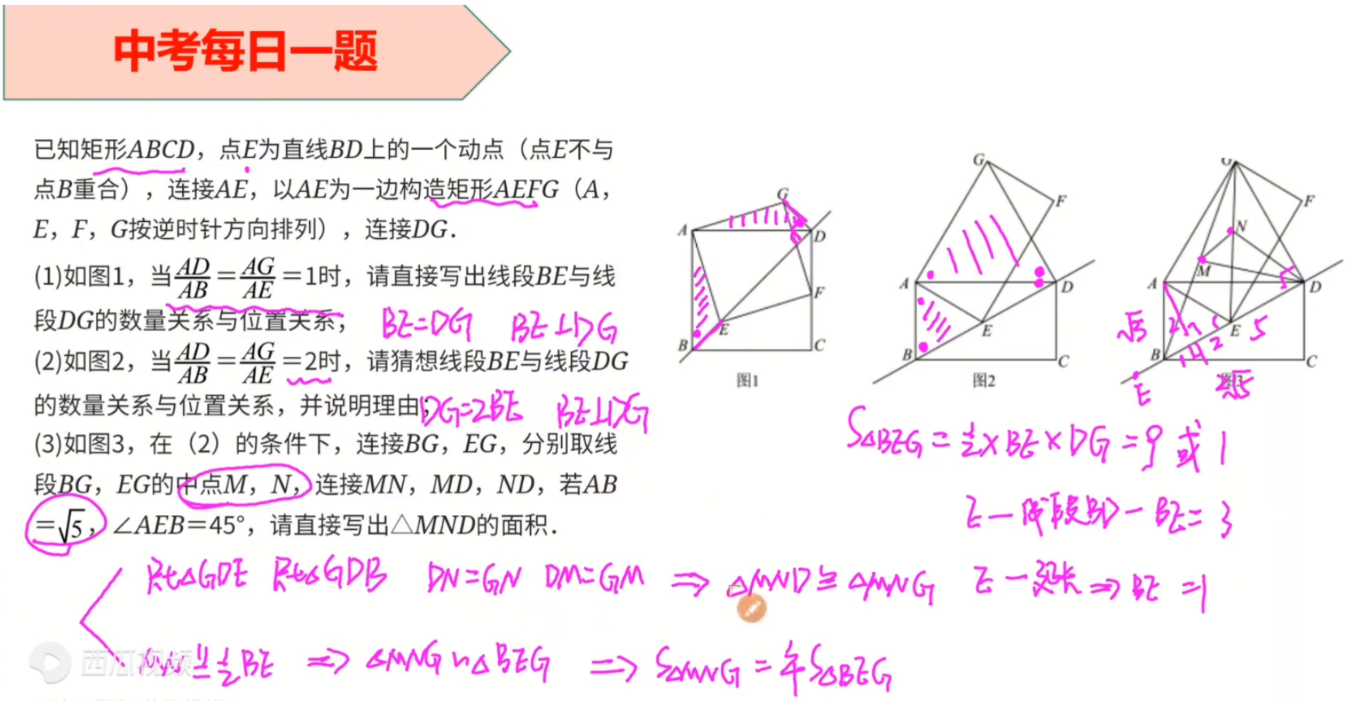


题目

已知矩形$ABCD$，点E为直线BD上的一个动点（点E不与点B重合），连接AE，以AE为一边构造矩形$AEFG(A$，E，F，G按逆时针方向排列），连接DG.

(1)如图1，当$\frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AE}=1$时，请直接写出线段$BE$与线段$DG$的数量关系与位置关系；

(2)如图2，当$\frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AE}=2$时，请猜想线段$BE$与线段$DG$的数量关系与位置关系，并说明理由；

(3)如图3，在（2）的条件下，连接BG，EG，分别取线段BG，EG的中点M，N，连接MN，MD，ND，若$AB=\sqrt{5}$，$\angle AEB=45^{\circ}$，请直接写出$\triangle MND$的面积.

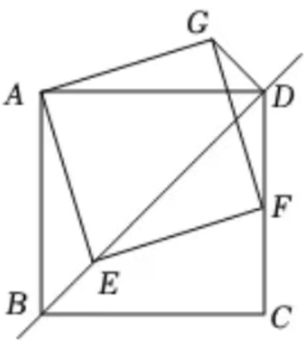


图1

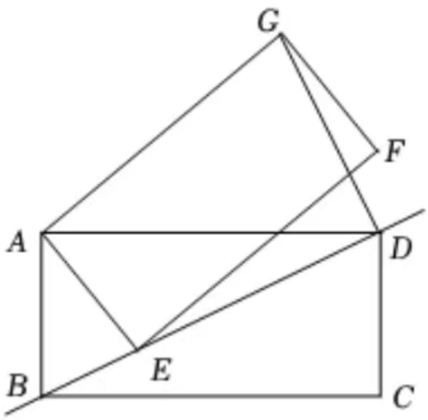


图2

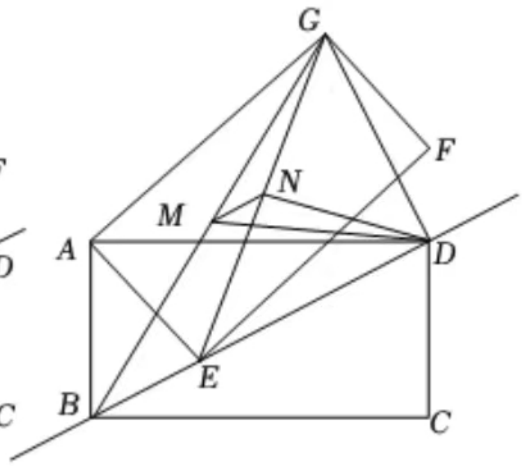


图3

解答

（1）由题意得：四边形$ABCD$和四边形$AEFG$是正方形，

$\therefore AB=AD$，$AE=AG$，

$\angle BAD=\angle EAG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD-\angle DAE=\angle EAG-\angle DAE$

，

$\therefore \angle BAE=\angle DAG$，

$\therefore \triangle BAE\cong\triangle DAG(SAS)$，

$\therefore BE=DG$，$\angle ABE=\angle ADG$，

$\angle ADG+\angle ADB=\angle ABE+\angle ADB$

$\therefore \angle ADG + \angle ADB = \angle ABE + \angle ADB = 90^\circ$

,

$\therefore \angle BDG = 90^\circ$,

$\therefore BE \perp DG$;

(2)$BE = \frac{1}{2}DG$，$BE \perp DG$，理由如下：

由（1）得：$\angle BAE = \angle DAG$,

$\because \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AE} = 2$,

$\therefore \triangle BAE \backsim \triangle DAG$,

$\therefore \frac{DG}{BE} = \frac{AD}{AB} = 2$，$\angle ABE = \angle ADG$,

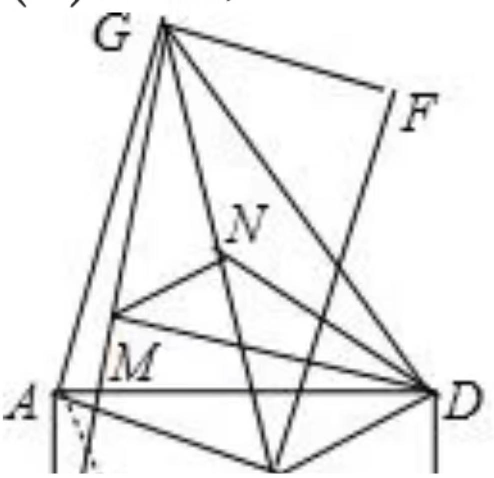
$\therefore \angle ADG + \angle ADB = \angle ABE + \angle ADB = 90^\circ$

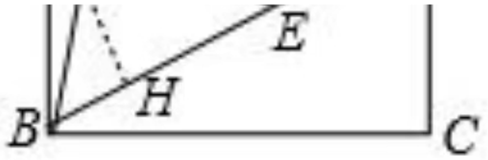
,

$\therefore \angle BDG = 90^\circ$,

$\therefore BE \perp DG$;

(3)如图，





当B在线段BD上时，

作$AH\perp BD$于H，

$\because \tan\angle ABD=\frac{AH}{BH}=\frac{AD}{AB}=2$，

$\therefore$设$AH=2x$，$BH=x$，

在$Rt\triangle ABH$中，

$x^2+(2x)^2=(\sqrt{5})^2$，

$\therefore BH=1$，$AH=2$，

在$Rt\triangle AEH$中，

$\because \tan\angle AEB=\frac{AH}{EH}$，

$\therefore \frac{AH}{EH}=tan45^\circ=1$，

$\therefore EH=AH=2$，

$\therefore BE=BH+EH=3$，

$\because BD=\sqrt{AB^2+AD^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$

，

$\therefore DE=BD-BE=5-3=2$，

由（2）得：$\frac{DG}{BE}=2$，$DG\perp BE$，

$\therefore DG=2BE=6$,

$\therefore S_{\triangle BEG}=\frac{1}{2}BE\bullet DG=\frac{1}{2}\times3\times6$

$=9$

,

在$Rt\triangle BDG$和$Rt\triangle DEG$中，点M是BG的中点，点N是CE的中点，

$\therefore DM=GM=\frac{1}{2}BG$，$DN=GN$

$=\frac{1}{2}EG$

,

$\because NM=NM$,

$\therefore \triangle DMN\cong\triangle GMN\,(SSS)$,

$\because MN$是$\triangle BEG$的中位线,

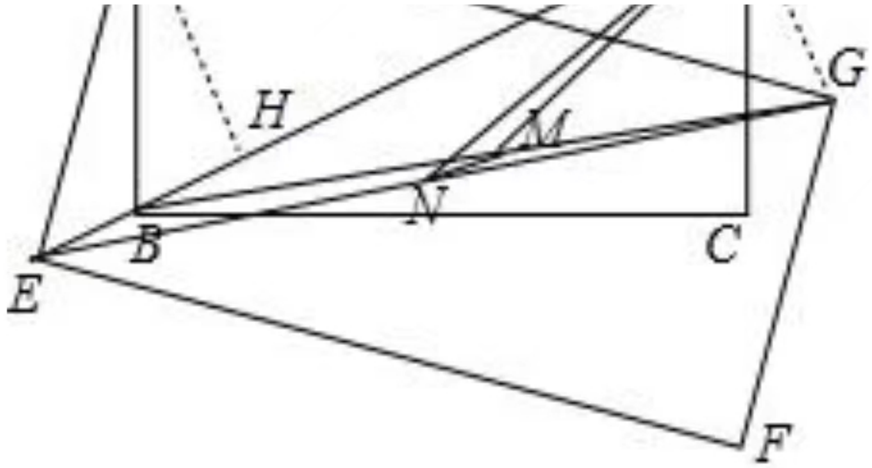
$\therefore MN/\!/BE$,

$\therefore \triangle BEG\backsim\triangle MNG$,

$\therefore \frac{S_{\triangle MNG}}{S_{\triangle BEG}}=(\frac{GM}{GB})^2=\frac{1}{4}$,

$\therefore S_{\triangle MND}=S_{\triangle MNG}=\frac{1}{4}S_{\triangle BEG}=\frac{9}{4}$,

如图,



同上可得：$BE = EH - BH = 2 - 1 = 1$

,

$DG = 2BE = 2,$

$\therefore S_{\triangle BEG} = \frac{1}{2}BE \bullet DG = 1,$

$\therefore S_{\triangle DMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle BEG} = \frac{1}{4},$

综上所述：$\triangle DMN$的面积是$\frac{9}{4}$或$\frac{1}{4}$.