

数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$ ， $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$ ，则 $z =$
A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$ ， $\mathbf{b} = (2, x)$ ，若 $\mathbf{b} \perp (\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$ ，则 $x =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$ ， $\tan \alpha \tan \beta = 2$ ，则 $\cos(\alpha - \beta) =$
A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$
5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$ ，则圆锥的体积为
A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的交点个数为
A. 3 B. 4 C. 6 D. 8
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ ，且当 $x < 3$ 时， $f(x) = x$ ，则下列结论中一定正确的是
A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1\,000$ C. $f(10) < 1\,000$ D. $f(20) < 10\,000$

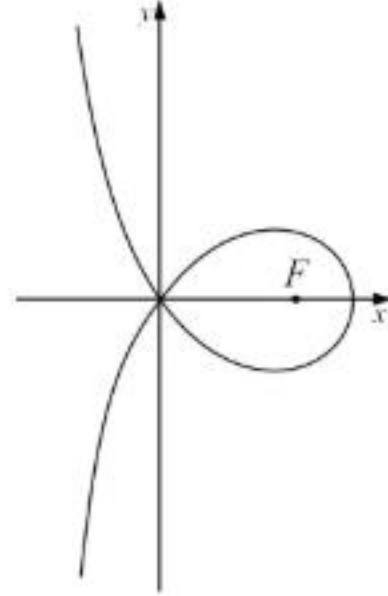
二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分。每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x} = 2.1$ ，样本方差 $s^2 = 0.01$ ，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$ ，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $(\bar{x}, s^2)$ ，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$ ）
A. $P(X > 2) > 0.2$ B. $P(X > 2) < 0.5$
C. $P(Y > 2) > 0.5$ D. $P(Y > 2) < 0.8$
10. 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$ ，则
A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B. 当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < f(x^2)$
C. 当 $1 < x < 2$ 时， $-4 < f(2x-1) < 0$ D. 当 $-1 < x < 0$ 时， $f(2-x) > f(x)$

11. 造型 b 可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分。已知 C 过坐标原点 O ，且 C 上的点满足横坐标大于 -2 ，到点 $F(2, 0)$

的距离与到定直线 $x = a (a < 0)$ 的距离之积为 4，则

- $a = -2$
- 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
- C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
- 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时， $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$



三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点，若 $|F_1A| = 13$ ， $|AB| = 10$ ，则 C 的离心率为_____。
13. 若曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线，则 $a =$ _____。
14. 甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，假的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7，乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8。两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为_____。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ ，

$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab.$$

- (1) 求 B ；
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$ ，求 c 。

16. (15 分)

已知 $A(0, 3)$ 和 $P(3, \frac{3}{2})$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点。

- (1) 求 C 的离心率；
- (2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B ，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 l 的方程。

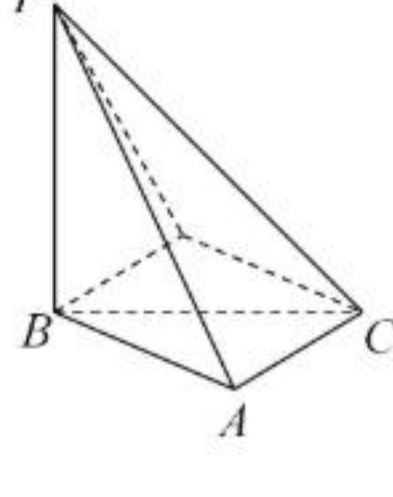
17. (15 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA = AC = 2$ ，

$$BC = 1, AB = \sqrt{3}.$$

- (1) 若 $AD \perp PB$ ，证明： $AD \parallel$ 平面 PBC ；
- (2) 若 $AD \perp DC$ ，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$ ，

求 AD 。



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$ 。

- (1) 若 $b = 0$ ，且 $f'(x) \geq 0$ ，求 a 的最小值；
- (2) 证明：曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形；
- (3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$ ，求 b 的取值范围。

19. (17 分)

设 m 为正整数，数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j (i < j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列。

- (1) 写出所有的 (i, j) ， $1 \leq i < j \leq 6$ ，使得数列 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 是 (i, j) -可分数列；
- (2) 当 $m \geq 3$ 时，证明：数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列；
- (3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j (i < j)$ ，记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m ，证明： $P_m > \frac{1}{8}$ 。